|  |
| --- |
| ОТДЕЛ ОБРАЗОВАНИЯ, СПОРТА И ТУРИЗМА  ВОЛКОВЫССКОГО РАЙОННОГО  ИСПОЛНИТЕЛЬНОГО КОМИТЕТА |
| Государственное учреждение образования  «Гимназия № 2 г. Волковыска» |
| 231900, Гродненская обл., г.Волковыск ул. Социалистическая,10, |
| тел. (01512) 2 00 66 эл. почта: gimn2\_volk @mail.ru |

ПРОЕКТНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

**ТЕМА ПРОЕКТА**

**Геометрические задачи:**

**метод дополнительных построений**

**Руководители проекта:**

Козак Марина Анатольевна,

учитель математики

**Работу выполнили:**

Хамицкая Анастасия

Анатольевна,

учащаяся 11 «Б» класса

**г.Санкт-Петербург**

**2017**

**Содержание**

Введение…………………………………………………………………………...3

Глава 1. Трапеция ………………………………………………………………...4

Глава 2. Свойство медиан……………………………………………………….10

Глава 3. Свойства подобия……………………………………………………...13

Глава 4. Теорема Фалеса и ее следствия……………………………………….15

Глава 5. Свойства параллелограмма……………………………………………17

Глава 6. Задачи повышенной сложности………………………………………20

Заключение………………………………………………………………………24

Список используемых источников……………………………………………..26

Приложения…………………………...…………………………………………27

# 

# Введение

*«Искусство математики в том и заключается, чтобы делать сложные вещи как можно проще».*

Данная цитата не зря вынесена в начало работы, так как в школьном курсе геометрии многие задачи решаются двумя и более способами. Конечно, понятие рациональности для каждого свое, но порой бывают методы, которые позволяют меньше делать вычислений, вплоть до решения задачи прямо на чертеже, что позволяет оптимально экономить время и силы при решении тестов. Пытаясь решать одни и те же геометрические задачи разными способами, я обнаружила ряд заданий, которые, помимо традиционного метода, оригинально решаются после выполнения каких-то дополнительных геометрических построений. Эта тема меня заинтересовала. Сначала мне попадались единичные задачи, которые можно было решать этим способом, но, когда я стала целенаправленно искать такие задания в разных источниках, увидела, что их много и можно их попытаться систематизировать по темам школьного курса геометрии. И еще я выдвинули гипотезу, что их можно классифицировать по способам дополнительных построений. Таким образом, объектом моих исследований стали геометрические задачи, а предметом исследования – дополнительные построения.

Итак,

***Цель:*** *классифицировать геометрические задачи, решаемые с помощью дополнительных построений.*

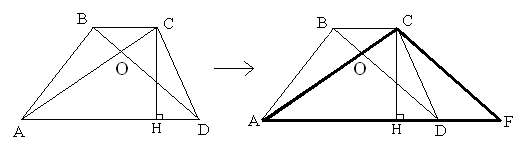
***Задачи: -*** *рассмотреть геометрические задачи, решаемые с помощью дополнительных построений;*

***-*** *классифицировать их по способу дополнительного построения.*

# Глава I. Трапеция

Для начала рассмотрим задачу, выводы из которой мы будем использовать при решении задач, связанных с трапецией.

**Основная задача.** Доказать, что площадь трапеции *ABCD* равна площади треугольника *ACF* (*CF||BD*) и .



Доказательство.

2. *BC||AD* – основания трапеции*,* а значит *BC||DF*;

*BD||CF* – по условию.

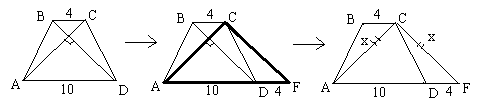
Следовательно, *BCFD* – параллелограмм и *BC=DF*.

Значит,

.

1. – внутренние накрест лежащие углы при *BD||CF* и секущей *АС*.

**Задача 1.** В равнобокой трапеции диагонали пересекаются под прямым углом, а основания равны *4 см* и *10 см*. Найдите площадь трапеции.



*Решение.*

1. Проведем *CF||BD*.

Из основной задачи .

1. Рассмотрим Δ*ACF*:

*AC=CF*, так как *BCFD* – параллелограмм (основная задача).

, значит Δ*ACF* – прямоугольный и равнобедренный

1. Δ*ACF* :  *.*

Пусть *AC=CF=x*.

По теореме Пифагора ,

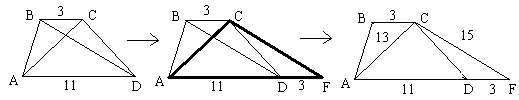
*,*

*см,*

*см².*

*Ответ:* *49 см².*

**Задача 2.** Вычислите площадь трапеции *ABCD* c основаниями *BC* и *AD*, если  *BC=3 см, AD=11 см, AC=13 см, BD=15 см.*



*Решение.*

1. Проведем *CF* параллельно диагонали *BD*.

Получим со сторонами *AC=13 см,*

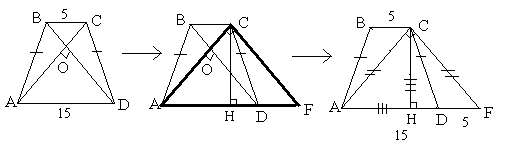
1. (основная задача)

По формуле Герона:

*см².*

*Ответ.* *84 см²*.

**Задача 3.** В равнобедренной трапеции диагонали пересекаются под прямым углом. Основания трапеции равны *5 см* и *15 см*. Вычислите длину высоты трапеции.



*Решение.*

Можно, конечно, сразу воспользоваться свойством равнобокой трапеции с перпендикулярными диагоналями – высота равна средней линии.

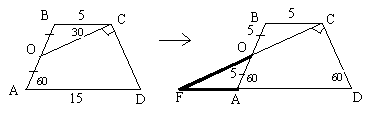
Мы докажем это свойство с помощью дополнительного построения.

1. Проведем высоту трапеции *СН* и *CF||BD*.
2. – прямоугольный и равнобедренный (основная задача);

*см.*

*Ответ: 10 см*.

**Задача 4.** Дана трапеция *ABCD*. *О* – середина стороны *АВ*, *BC=5 cм,* Найдите периметр трапеции. [1, c. 113]



*Решение.*

1. Продлим *СО* до пересечения с *AD*, .
2. Рассмотрим :

– свойство углов трапеции,

– свойство углов треугольника,

Значит, – равнобедренный.

Следовательно, *ВО=АО=5 см*.

1. Рассмотрим прямоугольный треугольник *FCD*.

– накрест лежащие углы при *BC||AD* и секущей *FC*.

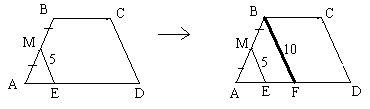
Значит, и .

Следовательно, *BA=CD=2ОВ=10 см*.

1. *см*.

*Ответ: 40 см*.

**Задача 5.** Точка *M* – середина стороны *АВ* трапеции *ABCD*. *МЕ||СD* и *МЕ=5 см*. Найдите длину стороны *CD*. [4, c. 25]



*Решение.*

1. Проведем *BF||ME*.
2. Рассмотрим .

*МЕ* – средняя линия треугольника ,

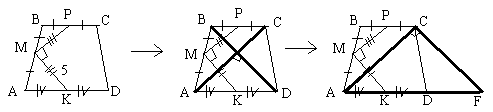
*BF=2ME=10 см*.

1. *BCFD* – параллелограмм, т. к. *BC||AD, BF||ME||CD*.

Значит, *BF=CD=10 cм*.

*Ответ: 10 см*.

**Задача 6.** Дана трапеция *ABCD*. Точки *М, Р, К* – середины сторон *AB, BC, AD* соответственно. Найдите площадь трапеции, если *МК=МР=5 см* и .



*Решение.*

1. Проведем диагонали BD и AC трапеции.
2. :

*АС||*MP и АС*=2МР=10 см (МР* – средняя линия)

1. :

*BD||*MK и BD*=2MK=10 см* (*МК* – средняя линия),

Значит, угол между диагоналями – прямой.

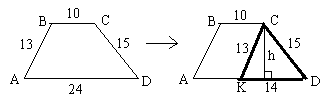
1. Проведем *CF||BD*.

(из основной задачи).

Из основной задачи *см²*.

*Ответ:* *50 см²*.

**Задача 7.** Основания трапеции равны *10 см* и *24 см*, а боковые стороны равны *13 см* и *15 см*. Вычислите площадь трапеции.



*Решение.*

1. Проведем *CK||AB*.

*АВСК* – параллелограмм, т. к. *BC||AD, AB||CK*.

Значит, *СК=АВ=13 см, ВС=АК=10 см*.

Тогда *KD=14 cм*.

1. По формуле Герона *см²*.

,

,

*см*.

1. *см²*.

*Ответ:* *204 см²*.

# Глава II. Свойство медиан

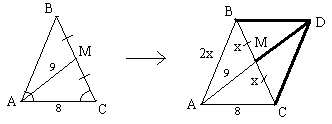
Напомним некоторые свойства медиан, которыми мы будем пользоваться при решении задач в данном параграфе.

- медиана делит треугольник на два равновеликих;

- три медианы делят треугольник на шесть равновеликих;

- медианы точкой пересечения делятся в отношении *2:1*, считая от вершины.

**Задача 8.** В треугольнике *АВС* медиана *АМ=9 см*, а *АС=8 см*. Найдите длину стороны *АВ*, если .



*Решение.*

1. Проведем *BD||AC* и *AB||CD*. Получим параллелограмм *ABDC*.
2. Так как , то треугольник *АВС* – равнобедренный.

Пусть *АВ=2х см*, тогда *ВМ=МС=х см*.

*,*

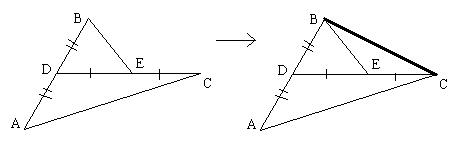
*,*

*см.*

Тогда *АВ=14 см.*

*Ответ: 14 см*.

**Задача 9.** Дан треугольник *DBE*. На лучах *BD* и DC взяты точки *А* и *С* так, что *BD=DA*, *DE=EC*. Вычислите площадь треугольника *ADC*, если *см²*.



*Решение.*

1. Соединим точки *В* и *С*.
2. Рассмотрим , *ВЕ* – медиана (по условию *DE=EC*).

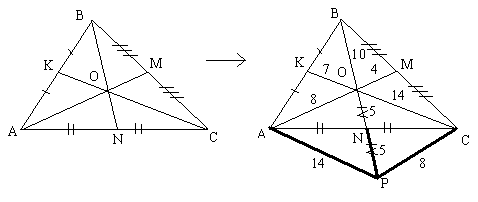
Значит, *см²*.

1. Рассмотрим , *CD* – медиана (по условию *AD=DB*).

Значит, *см²*.

*Ответ: 12 см²*.

**Задача 10.** В треугольнике *АВС* медианы *AM, BN* и *CK* пересекаются в точке *О*. Вычислите площадь треугольника и длину стороны *АС*, если *AM=12 см, BN=15 см,* *CK=21 см*.



*Решение.*

1. Продлим  *BN* за точку *N* так, что *ON=NP*. Соединим точку *Р* с точками *А* и *С*.

Тогда *АОСР* – параллелограмм, т. к. диагонали *АС* и *ОР* пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

*см*.

1. Рассмотрим треугольник *РОС.*

По формуле Герона *см²*.

*см²* – свойство медианы треугольника.

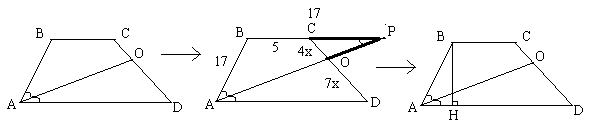
1. *см²* – свойство медиан треугольника.

*Ответ:*  *см, см*.

# Глава III. Свойства подобия

В курсе школьной геометрии есть много задач на подобие, решаемых способом дополнительных построений, но эта нам показалась достаточно оригинальной, чтобы включить ее в работу.

**Задача 11.** На стороне *CD* трапеции ABCD взята точка *О* так, что *CO:OD=4:7*. Вычислите площадь трапеции, если *AB=CD=17 см, ВС=5 см* и *АО* является биссектрисой угла *BAD*.



*Решение.*

1. Продлим *АО* до пересечения с *ВС* и поставим точку *Р*.
2. Рассмотрим :

*–* накрест лежащие при *AD||BP* и секущей *АР,*

*,*

Значит, – равнобедренный:

*ВР=АВ=17 см*.

1. по двум углам:

*–* по доказанному,

– вертикальные.

Значит,  *AD=21 см.*

1. Проведем высоту *ВН*.

.

*см*.

По теореме Пифагора ,

*см.*

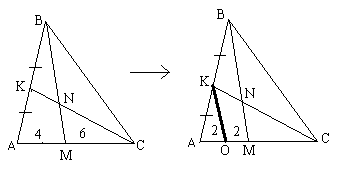
1. *см².*

*Ответ:* *195 см².*

**Глава IV. Теорема Фалеса и ее следствия**

В этом параграфе мы рассмотрели задачи, связанные с теоремой Фалеса и ее следствиями. Конечно, их можно было бы попробовать решить и с помощью теоремы Менелая, но эту теорему мы не всегда можем увидеть.

**Задача 12.** *СК* – медиана треугольника *АВС*. Точка *М* делит сторону *АС* на отрезки *4 см* и  *6 см*, считая от вершины *А*. Найдите отношение *NС:КN* (*N* – точка пересечения *ВМ* и *СК*). [4, c. 24]



*Решение.*

1. Проведем *КО||BM*.

Рассмотрим угол *ВАМ*: по теореме Фалеса

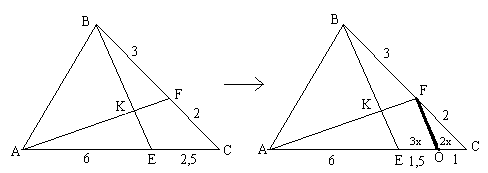
, тогда *АО=ОМ==2 cм*.

1. Рассмотрим угол *КСО*: по теореме Фалеса

.

*Ответ: CN:NK=3:1*.

**Задача 13.** В треугольнике *АВС* точки *F* и *Е* расположены на сторонах *ВС* и *АС* соответственно так, что *BF=3 см, FC=2см, АЕ=6 см* и *ЕС=2,5 см*. Найдите отношение *AK:KF* (*К* – точка пересечения *AF* и *ВЕ*). [4, c. 24]



*Решение.*

1. Проведем *FO||BE*.

Рассмотрим угол *ВСЕ*: по теореме Фалеса

,

Пусть *СО=2х, ОЕ=3х*, тогда

*СО+ОЕ=2х+3х=2,5*,

*х=0,5*.

Значит, *СО=1 см*, *ОЕ=1,5 см*.

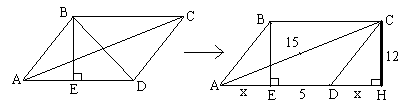
1. Рассмотрим угол *FAO*: по теореме Фалеса

,

*Ответ: AK:KF=4:1*.

# Глава V. Свойства параллелограмма

**Задача 14.** Вычислите площадь параллелограмма *ABCD*, если *BD=13 см, АС=15 см*, а высота *ВЕ* равна *12 см*.



*Решение.*

1. Рассмотрим : .

По теореме Пифагора

,

*см*.

1. Проведем высоту *СН*.

Рассмотрим прямоугольные треугольники и :

*AB=CD* – стороны параллелограмма,

*ВЕ=СН* – высота.

Значит, (по гипотенузе и катету).

1. Рассмотрим : .

По теореме Пифагора

,

*см*.

1. Пусть *AE=DH=x*, тогда *AH=AE+ED+DH*,

*2x+5=9,*

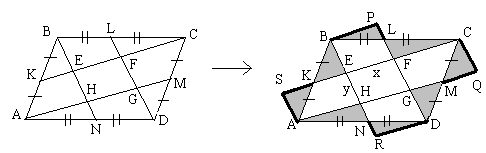
*х=2 см*.

Тогда, *AD=AE+ED=2+5=7 см*.

1. *см².*

*Ответ:* *84* *см².*

**Задача 15.** В параллелограмме *ABCD* точки *K, L, M, N* т – середины сторон параллелограмма *AB, BC, CD*  и *AD* соответственно. а) Докажите, что *BN, DL, AM, CK* делятся в отношении *2:2:1* считая от вершин параллелограмма. б) Найдите площадь четырехугольника *NHMD*, если площадь параллелограмма равна *60 см².*

**

*Решение.*

1. – по двум сторонам и углу между ними:

– свойство углов параллелограмма,

*AD=BC, DM=BK* – свойство сторон параллелограмма,

Рассмотрим угол *ВСК*:по теореме Фалеса .

*: KC||AM*, значит, *КЕ||AH*, т. к. *АК=КВ*, то *КЕ* – средняя линия и *АН=2КЕ*, а т. к. *АН=FC*, то *FC=2KE*.

Значит, *CF:FE:EK=2:2:1*.

1. Аналогично, *AH:HG:GM=2:2:1*.
2. Аналогично первому действию .

*BE:EH:HN=2:2:1* и *DG:GF:FL=2:2:1*.

1. ;

.

Значит, *12 cм².*

Пусть *EF=FC=AH=HC=x, BE=EH=FG=GD=y*,

тогда, *KE=SK=GM=GD=x, HN=NR=PL=LF=y.*

1. ,

.

Тогда *12 см².*

*Ответ: 12 см².*

# Глава VI. Задачи повышенной сложности

Решая олимпиадные задачи разного уровня и тематики, мы тоже обнаружили несколько задач, которые можно решить с помощью дополнительных построений.

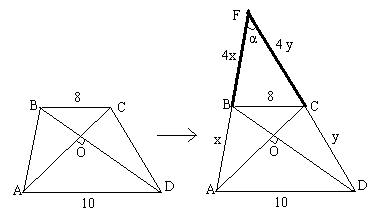
**Задача 16.** В трапеции *ABCD* диагонали пересекаются под прямым углом. Угол между боковыми сторонами равен α. Найдите площадь трапеции, если ее основания равны *8 см* и *10 см.*

*Решение.*

Решим данную задачу двумя способами.

*I способ.*

Этот способ основан на подобии, поэтому здесь будет показана только идея решения.

**

1. Продлим боковые стороны до их пересечения в точке *F*.
2. по двум углам:

– общий,

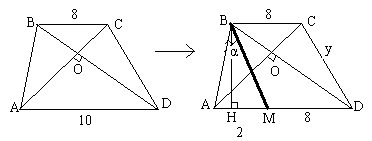
– соответственные при *AD||BC* и секущей *AF*.

Значит, .

Таким образом, *AB=x, BF=4x*.

Аналогично, *DC=y, CF=4y*.

*II способ.*



1. Проведем *BM||CD*.

равен углу между боковыми сторонами.

*MBCD* – параллелограмм.

*АМ=AD* – *MD=* *AD* – *BC=10 – 8=2 cм.*

1. Рассмотрим треугольники *AOD* и *ВОС:*

: .

По теореме Пифагора , .

*.*

По теореме Пифагора , .

1. Рассмотрим треугольники *АОВ* и *COD:*

: .

По теореме Пифагора , .

: .

По теореме Пифагора , .

1. Сложим два последних равенства:

*,*

1. Рассмотрим *:*

По теореме косинусов: ,

,

,

,

.

1. *см²*,

,

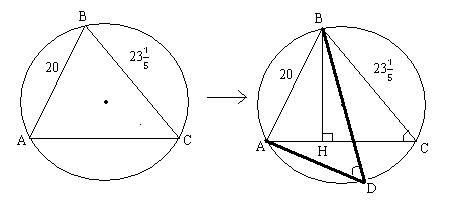
,

*BH=40tgα см.*

1. с*м*.

*Ответ: 360tgα cм².*

**Задача 17.** В окружность радиуса *см* вписан треугольник, две стороны которого равны *см* и *см.* Вычислите радиус вписанной окружности в данный треугольник.



*Решение.*

1. Дан треугольник *АВС*, где *АВ= см, ВС= см.*

Проведем диаметр *BD* и соединим точки *D* и *А*, проведем также высоту *ВН*.

1. (по двум углам).

–вписанные углы, опирающиеся на одну дугу *АВ*,

, так как – вписанный угол, опирающийся на диаметр.

Значит, , откуда .

1. Рассмотрим .

По теореме Пифагора ,

*см.*

Рассмотрим .

По теореме Пифагора ,

*см*.

*AC=AH+HC= см.*

1. ,

*см²,*

*см,*

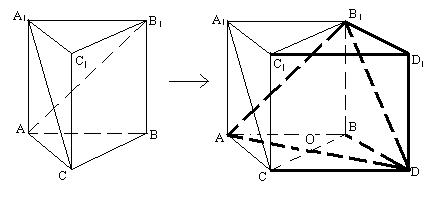
*см.*

*Ответ: 6,4 см.*

**Заключение**

В стереометрии есть задачи, которые можно решить с помощью дополнительных построений. Я привожу здесь одну из них. А вообще, это тема моей работы на следующий год.

**Задача 18.** В правильной треугольной призме *см, см, см.* Найдите градусную меру угла между прямыми и .



*Решение.*

1. К данной треугольной призме достроим еще одну такую же. получим четырехугольную призму .

Т. к. грани и равны и параллельны, то =*6 см*, угол между прямыми и равен углу .

1. Рассмотрим – равносторонний.

Значит, *AO=5 cм*, тогда *AD=10 см*.

1. Рассмотрим . Т. к. *8 см*, = *6 см*, *AD=2AO=10 cм*, то является египетским, значит .

*Ответ: 90˚.*

Анализируя все задачи, рассмотренные в данной работе, мы не смогли полностью классифицировать их по способу дополнительных построений, но некоторые выводы нам удалось сделать:

- если в трапеции даны диагонали, то нужно переносить параллельно одну из них и рассматривать треугольник;

- в трапециях часто нужно делать дополнительные построения так, чтобы получались подобные или равные треугольники;

- если задачи на треугольники, связаны с медианами, то нужно продлить медиану или ее часть;

- если в треугольниках даны какие-то отношения или их нужно найти, то проводят параллельные отрезки, чтобы можно было применить теорему Фалеса или ее следствие.

**Список используемых источников**

1. Орехова, А.И. Задачи на готовых чертежах. Геометрия: в 3 ч. / А.И. Орехова. – 4-е изд. – Мозырь: Белый Ветер, 2011.- 180 с.
2. Рабинович, Е.М. Задачи и упражнения на готовых чертежах. 7-9 классы. Геометрия. – М.: Илекса, Харьков: Гимназия, 2003. – 56 с.
3. Централизованное тестирование. Математика: полный сборник тестов/ Респ. Ин-т контроля знаний М-ва образования Респ. Беларусь. – Минск: Аверсэв, 2011. – 228 с.

***Приложение***

*Задачи для самостоятельного решения.*

**1.** *Задача 1.* В равнобокой трапеции диагонали перпендикулярны, а основания равны *3 см* и *7 см*. Найдите площадь трапеции.

*Ответ: 25 см².*

*Задача 2.* В трапеции *ABCD AC=11 см*, *BD=13 см*, *AD=17 см*, *BC=3 см*. Найдите площадь трапеции.

*Ответ: 66 см².*

*Задача 3.* Найдите площадь трапеции, если ее диагонали равны *7см* и *15 см*, а основания – *2 см* и *18 см*.

*Ответ: 42 см².*

**2.** *Задача 4.* В равнобедренном треугольнике основание равно *16 см*, а боковая сторона – *10 см*. Найдите длину медианы, проведенной к боковой стороне.

*Задача 5.* В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна  *см*, а медиана, проведенная к боковой стороне, равна *5 см*. Найдите основание треугольника.

**3.** *Задача 6.* В равнобокой трапеции *ABCD* боковые стороны равны *20 см*. *АО* – биссектриса угла *BAD,* причем *CО:ОD=3:8*. Найдите площадь трапеции.

**4.** *Задача 7.* *СК* – медиана треугольника *АВС*. Точка *М* делит сторону *АС* на отрезки *4 см* и  *6 см*, считая от вершины *А*. Найдите отношение *ВN:NМ* (*N* – точка пересечения *ВМ* и *СК*).

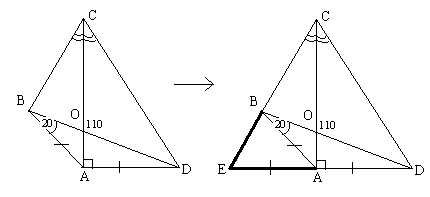
*Задача 8.* В треугольнике *АВС* точки *F* и *Е* расположены на сто-ронах *ВС* и *АС* соответственно так, что *BF=3 см, FC=2см, АЕ=6 см* и *ЕС=2,5 см*. Найдите отношение *ВK:KЕ* (*К* – точка пересечения *AF* и *ВЕ*).

**5.** *Задача 9.* Найдите площадь параллелограмма *ABCD*, если *АС= =25см, ВК=15 см, BD=17 см*.

**6.** *Задача 10.* В четырехугольнике *ABCD* угол между диагоналями равен *110˚*, *AB=AD*, диагональ *СА* перпендикулярна стороне *AD*, диагональ *СА* является биссектрисой угла *ВСА*, а *20˚*. Найдите угол *ВСА.*

*Указание.* См. рисунок.

*Ответ: 20˚.*



Задачи, которые можно решить с помощью дополнительных построений есть в сборнике экзаменационных материалов за курс базовой школы, например,

5.4.13,

5.4.14,

5.4.21,

5.4.28,

5.4.32,

5.4.29.